



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



enim
École Nationale
d'Ingénieurs de Metz

Mécanismes de déformation

MécaDef

ENIM – 5A

Travaux Dirigés

Prof. Antoine GUITTON

antoine.guitton@univ-lorraine.fr

Version : août, 2026

Exercice I Questions sur le cours

Avez-vous confiance en vos connaissances du cours ? Veuillez répondre à chaque question pour vérifier votre compréhension.

1. La déformation plastique est réversible : un matériau revient à sa forme initiale lorsque la contrainte est retirée.

☐ Vrai

☐ Faux

2. La contrainte théorique de cisaillement de Frenkel est de l'ordre de $G/30$, où G est le module de cisaillement, ce qui est en bon accord avec les valeurs expérimentales mesurées sur les métaux purs recuits.

☐ Vrai

☐ Faux

3. Le modèle de Frenkel suppose que les atomes glissent simultanément et de manière homogène d'un plan cristallographique sur l'autre.

☐ Vrai

☐ Faux

4. Taylor, Orowan et Polanyi ont proposé indépendamment en 1934 l'hypothèse que la plasticité est assurée par le mouvement de défauts linéaires : les dislocations.

☐ Vrai

☐ Faux

5. La densité de dislocations dans un métal recuit est typiquement de l'ordre de 10^{12} m^{-2} , alors qu'elle peut atteindre 10^{16} m^{-2} après déformation sévère.

☐ Vrai

☐ Faux

6. Le vecteur de Burgers d'une dislocation coin est parallèle à la ligne de dislocation.

☐ Vrai

☐ Faux

7. Le vecteur de Burgers d'une dislocation vis est perpendiculaire à la ligne de dislocation.

☐ Vrai

☐ Faux

8. Le vecteur de Burgers est conservé tout au long d'une ligne de dislocation, y compris aux nœuds d'un réseau de dislocations.

☐ Vrai☐ Faux

9. Une dislocation mixte possède à la fois un caractère vis et un caractère coin ; son vecteur de Burgers fait un angle quelconque compris entre 0 et 90° avec la direction de la ligne.

☐ Vrai☐ Faux

10. Seule une dislocation vis peut effectuer un glissement dévié (cross-slip), car son plan de glissement n'est pas unique.

☐ Vrai☐ Faux

11. Le champ de contrainte d'une dislocation vis génère une pression hydrostatique non nulle, ce qui lui permet d'interagir avec des atomes de soluté de taille différente.

☐ Vrai☐ Faux

12. L'énergie élastique par unité de longueur d'une dislocation est proportionnelle à b^2 , ce qui rend les dislocations de grand vecteur de Burgers énergétiquement défavorables.

☐ Vrai☐ Faux

13. L'énergie élastique d'une dislocation coin est inférieure à celle d'une dislocation vis de même vecteur de Burgers, en raison du facteur $(1 - \nu)$ au dénominateur.

☐ Vrai☐ Faux

14. La règle de Frank stipule qu'une réaction entre deux dislocations de vecteurs de Burgers $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ est énergétiquement favorable si $b_1^2 + b_2^2 > b_3^2$, où $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

☐ Vrai☐ Faux

15. Une dislocation proche d'une surface libre est attirée vers cette surface par une force image attractive, qui diminue lorsque la dislocation s'en approche.

☐ Vrai☐ Faux

16. La force de Peach-Koehler par unité de longueur exercée par un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ sur une dislocation de vecteur de Burgers $\mathbf{b}$ et de ligne $\boldsymbol{\xi}$ est $\mathbf{f} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) \times \boldsymbol{\xi}$.

☐ Vrai☐ Faux

17. La tension de ligne d'une dislocation est la même quelle que soit son orientation (vis, coin ou mixte) dans un milieu isotrope.

☐ Vrai☐ Faux

18. La contrainte nécessaire pour maintenir une dislocation courbée avec un rayon de courbure R est $\tau = \mathcal{T}/(bR)$, où $\mathcal{T}$ est la tension de ligne; cette relation est à la base du calcul de la contrainte critique d'une source de Frank-Read.

☐ Vrai☐ Faux

19. Dans une structure CFC, les systèmes de glissement sont de type $\{111\}\langle 110 \rangle$, soit 12 systèmes indépendants.

☐ Vrai☐ Faux

20. Le facteur de Schmid est défini par $m = \cos \phi \cos \lambda$, où ϕ est l'angle entre l'axe de chargement et la normale au plan de glissement, et λ l'angle entre l'axe de chargement et la direction de glissement.

☐ Vrai☐ Faux

21. La loi de Schmid affirme que le glissement débute sur le système dont la cission résolue atteint en premier la cission critique résolue (CRSS), indépendamment de la contrainte normale sur le plan de glissement.

☐ Vrai☐ Faux

22. Le critère de von Mises exige au minimum 5 systèmes de glissement indépendants pour qu'un polycristal puisse se déformer de manière homogène sans fissuration aux joints de grains.

☐ Vrai☐ Faux

23. Dans les métaux CFC à faible énergie de faute d'empilement, les dislocations partielles de Shockley sont très écartées, ce qui rend le glissement dévié difficile.

☐ Vrai☐ Faux

24. La réaction de dissociation $\frac{a}{2}[110] \rightarrow \frac{a}{6}[211] + \frac{a}{6}[12\bar{1}]$ est énergétiquement favorable d'après la règle de Frank.

☐ Vrai☐ Faux

25. Une dislocation de Frank (partielle sessile) peut glisser librement dans son plan de faute car son vecteur de Burgers est contenu dans ce plan.

☐ Vrai☐ Faux

26. Une source de Frank-Read est un segment de dislocation ancré à ses deux extrémités ; sous contrainte, il s'incurve et génère des boucles de dislocation successives.

☐ Vrai☐ Faux

27. La contrainte critique pour activer une source de Frank-Read de longueur L est $\tau_{FR} \approx \alpha Gb/L$, avec $\alpha \approx 0,5$; elle augmente donc lorsque L diminue.

☐ Vrai☐ Faux

28. La relation de Taylor $\tau = \alpha Gb\sqrt{\rho}$ prédit que la contrainte d'écoulement augmente avec la racine carrée de la densité de dislocations, ce qui rend compte de l'écrouissage.

☐ Vrai☐ Faux

29. Lors de l'intersection de deux dislocations, un jog se forme sur chacune d'elles ; un jog sur une dislocation vis est sessile et sa progression nécessite la création ou l'absorption de lacunes.

☐ Vrai☐ Faux

30. Le modèle de Peierls-Nabarro prédit que la contrainte de Peierls est d'autant plus faible que le cœur de la dislocation est large ; c'est pourquoi les métaux CFC (cœur large) présentent une contrainte de Peierls bien inférieure à celle des métaux CC (cœur étroit non planaire).

☐ Vrai

☐ Faux

Exercice II Champ élastique d'une dislocation vis

On considère une dislocation vis pure, infinie, de vecteur de Burgers $\mathbf{b} = b \hat{z}$, dont la ligne est portée par l'axe z dans un milieu isotrope de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν .

Données (cuivre)

$G = 48 \text{ GPa}$, $b = 0.256 \text{ nm}$, $\nu = 0,34$, rayon de cœur $r_0 = 2b$, rayon externe $R = 1 \mu\text{m}$.

1. En suivant la construction de Volterra (coupe dans le plan xz , déplacement b selon $+z$), écrire le champ de déplacement de la dislocation vis :

$$u_z(x, y) = \frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad u_x = u_y = 0.$$

Vérifier que ce champ satisfait la condition de Burgers $\oint du_z = b$ sur tout circuit entourant la ligne.

2. Calculer le tenseur des déformations $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Montrer que les seules composantes non nulles sont :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -\frac{b}{4\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{b}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

3. En déduire le tenseur des contraintes via la loi de Hooke isotrope $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}$ (rappeler pourquoi la trace est nulle pour une vis pure). Écrire σ_{xz} et σ_{yz} en coordonnées polaires (r, θ) .
4. Calculer numériquement $|\sigma_{xz}|$ à $r = 5 \text{ nm}$ et $r = 50 \text{ nm}$ dans le cuivre pour $\theta = 90^\circ$. Comparer ces valeurs à $G/30$ (ordre de grandeur de la contrainte théorique de cisaillement de Frenkel).

5. Discuter la singularité en $r \rightarrow 0$. Pourquoi introduit-on un rayon de cœur r_0 ? En pratique, quelle réalité physique justifie cette coupure?
6. Calculer l'énergie élastique par unité de longueur de la dislocation vis :

$$\frac{W_s}{L} = \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \frac{R}{r_0}.$$

Donner le résultat numérique en J m^{-1} . Comparer à W_e/L pour une dislocation coin de mêmes paramètres (formule homologue avec le facteur $(1 - \nu)$ au dénominateur) et commenter l'écart.

Exercice III Champ de contrainte d'une dislocation coin et pression hydrostatique

On considère une dislocation coin pure de vecteur de Burgers $\mathbf{b} = b\hat{x}$, de ligne selon z , dans un milieu isotrope. Le champ de contrainte complet est (avec $A = Gb/[2\pi(1 - \nu)]$) :

$$\sigma_{xx} = -A \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = A \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = A \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Données (cuivre)

$$G = 48 \text{ GPa}, \quad b = 0.256 \text{ nm}, \quad \nu = 0,34.$$

1. Vérifier que $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -2A y/(x^2 + y^2)$. En déduire l'expression de la pression hydrostatique $p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ en coordonnées polaires (r, θ) .
2. Montrer que $p = 0$ pour une dislocation vis pure. Expliquer physiquement pourquoi le champ d'une vis ne génère pas de dilatation volumique.
3. La variation d'énergie d'interaction entre une dislocation coin et un atome de soluté de rayon r_s (différent du rayon r_0 du solvant) est :

$$U_{\text{int}} = -p \cdot \Delta V, \quad \Delta V = 4\pi r_0^2(r_s - r_0).$$

Pour quelles positions (r, θ) l'interaction est-elle attractive? Représenter schématiquement les zones d'attraction et de répulsion autour de la dislocation.

4. Pour un atome de Sn dans Cu ($\Delta V/\Omega \approx +0,4$, $\Omega = a^3/4$ volume atomique, $a = 0.361$ nm), estimer U_{int} à $r = 2$ nm, $\theta = 270^\circ$ (sous le demi-plan supplémentaire). Comparer à $k_B T$ à 300 K et conclure sur la tendance à la ségration.

Exercice IV Force de Peach-Koehler : dérivation et applications

La force de Peach-Koehler par unité de longueur exercée par un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ sur un élément de dislocation de vecteur de Burgers $\mathbf{b}$ et de vecteur ligne $\boldsymbol{\xi}$ est :

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) \times \boldsymbol{\xi}.$$

- Dérivation par travail virtuel.** On déplace un élément de dislocation dl d'une quantité δr perpendiculaire à $\boldsymbol{\xi}$. L'aire balayée est $\delta A = dl \cdot \delta r$. Le travail effectué par le champ $\boldsymbol{\sigma}$ correspond au déplacement $\mathbf{b}$ sur la surface δA . En écrivant $\delta W = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{l})$ et en identifiant la force $\mathbf{f}$ telle que $\delta W = \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dl$, retrouver la formule de Peach-Koehler.
- Application : dislocation vis sous cisaillement pur.** Une dislocation vis $\mathbf{b} = b \hat{z}$, $\boldsymbol{\xi} = \hat{z}$, est soumise à $\sigma_{xz} = \tau$.
 - Calculer $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}$ et en déduire $\mathbf{f}$.
 - Montrer que $|\mathbf{f}| = \tau b$ et que la force est dirigée selon $\hat{x}$ (direction de glissement).
 - Calculer numériquement f pour $\tau = 10$ MPa dans Cu.
- Application : force de montée d'une dislocation coin.** Une dislocation coin $\mathbf{b} = b \hat{x}$, $\boldsymbol{\xi} = \hat{z}$, est soumise à une contrainte normale $\sigma_{yy} = \sigma$.
 - Calculer la composante de $\mathbf{f}$ selon $\hat{y}$ (direction de montée).
 - Montrer que $f_y = \sigma b$. Quel signe de σ (traction ou compression) favorise l'émission de lacunes (montée positive) ?
 - À quelles conditions thermodynamiques la montée est-elle cinétiquement possible ? (une phrase suffit)
- Cas général : dislocation mixte.** Une dislocation mixte fait un angle $\theta = 30^\circ$ entre $\mathbf{b}$ et $\boldsymbol{\xi}$. Décomposer $\mathbf{b}$ en composante vis $b_s = b \cos \theta$ et composante coin

$b_e = b \sin \theta$. Exprimer les forces de glissement et de montée en fonction de τ , σ , b , θ .

Exercice V Forces image sur une dislocation vis près d'une surface libre

Une dislocation vis de vecteur de Burgers $\mathbf{b} = b \hat{z}$ se trouve à une distance d d'une surface libre plane (plan $x = 0$, demi-espace $x > 0$).

Données

Cu : $G = 48 \text{ GPa}$, $b = 0.256 \text{ nm}$, $\nu = 0,34$.

- 1. Construction de la dislocation image.** Pour satisfaire la condition de bord libre ($\sigma_{xz} = 0$ sur $x = 0$), on introduit une dislocation image placée en $x = -d$. Préciser le signe de son vecteur de Burgers par rapport à la dislocation réelle. Justifier physiquement.
- 2.** La force par unité de longueur exercée par la surface sur la dislocation réelle est :

$$F_x = -\frac{Gb^2}{4\pi d}.$$

Dériver ce résultat en utilisant le champ de la dislocation image et la force de Peach-Koehler (question 1 de l'exercice 3).

- 3.** Calculer numériquement F_x pour $d = 10 \text{ nm}$, 50 nm et 200 nm dans Cu. Comparer à la tension de ligne $T \approx Gb^2/2$ divisée par d .
- 4.** La même construction s'applique à une dislocation coin, mais la force image devient :

$$F_x = -\frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)d}.$$

Expliquer l'origine du facteur $(1 - \nu)$ supplémentaire par rapport au cas vis.

- 5. Conséquence pour les films minces.** Un film de Cu d'épaisseur $h = 100 \text{ nm}$ est déposé sur un substrat rigide (la surface libre est à $x = h$). Estimer la contrainte nécessaire pour maintenir une dislocation au centre du film ($d = h/2$) contre l'at-

traction des deux surfaces. Commenter par rapport à la contrainte critique d'une source de Frank-Read de longueur $L = h$.

Exercice VI Tension de ligne : dislocation mixte et forme d'équilibre

L'énergie par unité de longueur d'une dislocation mixte d'angle β entre la ligne et $\mathbf{b}$ est :

$$\frac{W(\beta)}{L} = \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)} [(1-\nu)\cos^2\beta + \sin^2\beta] \ln \frac{R}{r_0}.$$

La tension de ligne effective est définie par :

$$\mathcal{T}(\beta) = \frac{W(\beta)}{L} + \frac{d^2(W/L)}{d\beta^2}.$$

Données

Ni : $G = 76 \text{ GPa}$, $b = 0.249 \text{ nm}$, $\nu = 0,31$, $r_0 = 2b$, $R = 1 \mu\text{m}$.

1. Calculer $d(W/L)/d\beta$ et $d^2(W/L)/d\beta^2$. Montrer que :

$$\mathcal{T}(\beta) = \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)} [(1+\nu)\cos^2\beta + (1-2\nu)\sin^2\beta] \ln \frac{R}{r_0}.$$

2. Pour quelle orientation β la tension de ligne est-elle minimale ? Pour quelle orientation est-elle maximale ? Calculer le rapport $\mathcal{T}_{\max}/\mathcal{T}_{\min}$ pour Ni.
3. Un segment de dislocation courbé avec un rayon de courbure R_c est en équilibre sous une contrainte τ . En écrivant l'équilibre entre la force de Peach-Koehler $\tau b dl$ et la force de rappel de tension de ligne $2\mathcal{T} \sin(d\theta/2) \approx \mathcal{T} d\theta = \mathcal{T} dl/R_c$, retrouver :

$$\tau = \frac{\mathcal{T}(\beta)}{bR_c}.$$

4. **Source de Frank-Read.** Un segment ancré sur une longueur $L = 500 \text{ nm}$ dans Ni.

(a) Calculer la contrainte critique $\tau_{FR} = \alpha Gb/L$ avec $\alpha = 0,5$.

- (b) La boucle émise n'est pas circulaire mais approximativement elliptique, avec des axes dans le rapport $1/(1 - \nu)$. Calculer ce rapport pour Ni et commenter.
- (c) Comparer τ_{FR} à la limite d'élasticité macroscopique du Ni massif (70 MPa). Conclure sur la taille caractéristique des sources actives à la limite d'élasticité.

Exercice VII Modèle de Peierls-Nabarro : largeur de cœur et contrainte de Peierls

Dans le modèle de Peierls-Nabarro, la dislocation est représentée par une distribution continue de dislocations infinitésimales sur le plan de glissement $y = 0$:

$$\rho(x) = \frac{b}{\pi} \frac{w}{x^2 + w^2},$$

où w est la demi-largeur de cœur. Pour la dislocation coin, $w = a/[2(1 - \nu)]$; pour la dislocation vis, $w_0 = a/2$ (avec a le paramètre interréticulaire du plan de glissement).

La contrainte de Peierls est :

$$\tau_P \approx \frac{2G}{1 - \nu} \exp\left(-\frac{2\pi w}{b}\right).$$

Données

Al : $G = 26$ GPa, $a = 0.405$ nm, $\nu = 0,35$, $b = a/\sqrt{2}$.

W : $G = 161$ GPa, $a = 0.316$ nm, $\nu = 0,28$, $b = a\sqrt{3}/2$.

1. Rappeler les deux hypothèses fondamentales du modèle (description en une phrase chacune) : (i) milieu élastique linéaire dans chaque demi-cristal ; (ii) loi de restauration sinusoïdale dans le plan de glissement.
2. Calculer la demi-largeur de cœur w pour la dislocation coin dans Al et dans W. Calculer également w_0 pour la dislocation vis. Comparer les valeurs coin/vis pour chaque métal et commenter.
3. Calculer τ_P pour :
 - (a) la dislocation coin dans Al ;
 - (b) la dislocation vis dans Al ;

(c) la dislocation vis dans W.

Comparer à la limite d'élasticité macroscopique en cisaillement typique ($\tau_y \approx G/200$ à $G/100$ pour un métal pur recuit). Commenter les ordres de grandeur.

4. Expliquer qualitativement pourquoi τ_P est beaucoup plus élevée dans W que dans Al. Relier à la structure cristallographique (CFC vs CC) et à la structure du cœur de la dislocation vis en CC (cœur non-planaire, décomposition en trois plans $\{110\}$).

5. Limite du modèle.

- (a) Pourquoi la loi sinusoïdale est-elle une approximation ?
- (b) Pourquoi la contrainte de Peierls calculée peut-elle différer d'un à deux ordres de grandeur des valeurs expérimentales dans les métaux CC ?

Exercice VIII Interaction entre deux dislocations non parallèles : approche Peach-Koehler

On considère deux dislocations vis perpendiculaires dans le cuivre :

- Dislocation A : ligne selon $\hat{y}$, vecteur de Burgers $\mathbf{b}_A = b \hat{y}$.
- Dislocation B : ligne selon $\hat{z}$, vecteur de Burgers $\mathbf{b}_B = b \hat{z}$.

Les deux dislocations sont séparées d'une distance d selon $\hat{x}$.

Données

Cu : $G = 48 \text{ GPa}$, $b = 0.256 \text{ nm}$, $\nu = 0,34$.

1. Écrire le champ de contrainte de la dislocation A (vis, ligne selon $\hat{y}$) aux coordonnées $(d, 0, z)$ de la dislocation B. Identifier les composantes σ_{xy} et σ_{zy} de ce champ.
2. Appliquer la formule de Peach-Koehler pour calculer la force par unité de longueur exercée par A sur B :

$$\mathbf{f}_{A \rightarrow B} = (\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \mathbf{b}_B) \times \boldsymbol{\xi}_B.$$

Montrer que la force maximale (intégrée le long de B) vaut $F_{\max} \approx Gb^2/(2\pi d)$.

3. La force est-elle attractive ou répulsive pour les signes de Burgers choisis ? Que se passe-t-il si l'on inverse le signe de $\mathbf{b}_B$?

4. Calculer numériquement $F_{\max}$ pour $d = 20$ nm dans Cu. Comparer à la force entre deux vis *parallèles* de même signe à même distance, $F_{\parallel} = Gb^2/(2\pi d)$.
5. **Conséquence : formation d'un jog.** Lors de l'intersection des deux dislocations, un jog se forme sur chacune. Préciser la nature du jog créé sur B (vecteur de Burgers du jog, caractère glissile ou sessile). Quelle conséquence ce jog a-t-il sur la mobilité de B lors d'une déformation ultérieure ?